International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research

Journal home page:
https://journal.jbnuu.uz/

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM AN ENSEMLE TRAJECTORIES FOR ONE MODEL OF DYNAMIC SYSTEM UNDER CONDITIONS INCOMPLETE INFORMATION

Otakulov Salim[1]

Abduvokhidov Fazliddin[2]

Jizzakh Polytechnic Institute, Chirchik Higher Tank Command Engineering Military School

KEYWORDS

control system, incomplete information, differential inclusion, ensemble trajectories, minimax, nonsmooth problem, conditions of optimality

ABSTRACT

In the paper we considered one model of dynamic system in the form linear differential inclusion with control parameter and under conditions incomplete information about initial state. The control problem for ensemble trajectories of system according to minimax principle is researched. This control problem is study with a methods nonsmooth and multi-value analysis's. The necessary and sufficient conditions of optimality are obtained.

2181-3884/©2023 in Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan.
DOI: 10.5281/zenodo.8393187

[1] Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor, Jizzakh Polytechnic Institute, Jizzakh, Uzbekistan (otakulov52@mail.ru)
[2] Senior teacher, Chirchik Higher Tank Command Engineering Military School, Tashkent Region, Uzbekistan

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ АНСАМБЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ИНФОРМАЦИИ

KALIT SO‘ZLAR/ КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:
система управления, неполнота информации, дифференциальное включение, ансамбль траекторий, минимакс, негладкая задача, условия оптимальности

ANNOTATSIYA/ АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрена одна модель динамических систем в форме линейного дифференциального включения с параметром управления и в условиях неполноты информации о начальном состоянии. Изучена задача управления ансамбля траекторий системы по критерию минимакса. Данная задача исследована методами негладкого и многозначного анализа. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальные прикладные задачи, встречающихся в экономическом планировании и организации производства, при проектировании технических устройств и управления технологическими процессами и в других областях приводят разнообразным задачам оптимизации. Среди них особый интерес представляют негладкие задачи, задачи управления в условиях неопределенности, задачи управления ансамбля траекторий и другие тесно связанные с ними проблемы построения программного и позиционного управления [1]-[5]. К настоящему времени интенсивно развивается негладкий анализ, интервальный анализ, многозначный анализ и все более расширяется область их приложений к задачам оптимизации.

Эффективность методов решения каждой негладкой задачи оптимизации существенно зависит от вида и свойств целевых функций, а также и специфики ограничений на параметры. Часто возникают негладкие целевые функции типа максимума или минимума. К задачам оптимизации с такими критериями приводят, в частности, принципы минимакса и максимина, основанные на оптимизации гарантированного значения критерия качества управления [2].

Задачи управления и наблюдения в условиях неполноты информаций различного типа составляют большой класс задач математической теории оптимального управления. В исследованиях моделей систем управления в условиях информационных ограничений большой интерес представляют свойства ансамбля (пучка) траекторий, методы оценки достижимости и прогноза фазового состояния системы, условия гарантированного управления, задача минимаксного синтеза и др. [3]-[5]. В исследованиях таких задач большое значение имеют методы выпуклого анализа и теории дифференциальных включений [6]-[9].

Дифференциальные включения имеют многочисленные приложения в теории оптимального управления и в других областях математических исследований. Развиваются исследования задач оптимизации для дифференциальных включений с запаздываниями, дифференциальных включений с нечеткой правой частью и других классов дифференциальных включений [10]–[13].

Одним из развивающихся направлением в теории дифференциальных включений и их приложениям, является дифференциальные включения с управляющими и другими параметрами [13]-[16]. Исследование таких задач, как динамика семейства (ансамбля) траекторий дифференциальных включений относительно параметров и начальных данных, управляемость ансамбля траекторий на заданное терминальное множество, оптимизация управления ансамбля траекторий по заданным критериям представляют большой интерес для задач управления в условиях ограниченности информации и в конфликтных ситуациях.

В данной работе рассматривается модель динамической системы управления с параметром неконтролируемых внешних воздействий и неточным начальным состоянием. Цель управления в такой системе предусматривает достижения наилучшего результата с учетом наиболее неблагоприятных воздействий внешних сил и неполноты информации о начальном состоянии системы. Согласно этой цели сформулирована задача управления ансамблем траекторий системы в виде негладкой задачи минимаксного типа. Для данной задачи изучены необходимые и достаточные условия оптимальности. Применены методы теории дифференциальных включений, выпуклого и многозначного анализа. Полученные результаты составляют теоретическую базу при разработке алгоритма построения оптимального управления. Результаты данной работы развивают исследования [17]–[19].

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

2А.Динамическая система управления в условиях неполноты информации. Используем обозначение: R^n – n-мерное евклидово пространство векторов x, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ – норма вектора x, (x,y) – скалярное произведение векторов x и y. Рассмотрим динамическую систему, состояние которой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ определяется как решение векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, w), t \in T \,. \qquad (1)$$

В данной модели динамической системы имеются параметры двух типов: $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – параметры управления; $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ – параметры неконтролируемых внешних воздействий. В качестве допустимых управлений будем выбирать измеримые функции $u = u(t), t \in T$, принимающие значения из компакта $U \subset R^m$. Информация о параметрах внешних воздействий минимальна, т.е. будем считать, что они представляют собой некоторую измеримую функцию $w = w(t), t \in T$, со значениями из компакта $W \subset R^k$, причем конкретная их реализация в процессе управления заранее неизвестно. Кроме того, будем предполагать, что начальное состояние системы $x(t_0)$ также неизвестно заранее и задано лишь ограничение на допустимые значения этой величины, а именно $x(t_0) \in D$, где D – компакт из R^n. При таких предположениях рассматриваемое уравнение (1) представляет собой модель систему управления в условиях неполноты информации относительно неконтролируемых внешних возмущающих сил и начального состояния.

Множество всех допустимых управлений $u(t), t \in T$ обозначим U_T, а множество всех возможных реализаций $w(t), t \in T$ внешних возмущающих сил обозначим W_T. Чтобы при конкретной реализации параметров $u(\cdot) \in U_T$ и $w(\cdot), \in W_T$, а также начального состояния $x(t_0) = x^0$, можно было определить единственную абсолютно непрерывную траекторию $x = x(t, x^0, u(\cdot), w(\cdot))$, на правую часть уравнения следует налагать определенные условия [20], например, измеримость компонент n-вектор функции $f(t, x, u, w)$ по переменной $t \in T$, непрерывность по совокупности переменных $(x, u, w) \in R^n \times V \times W$ и ограничение на рост функции $f(t, x, u, w)$ вида $\|f(t, x, u, w)\| \le m(t)(\|x\| + \|u\| + \|w\|)$ или вида $|(x, \dot{x})| \le m(t)(\|x\|^2 + \|u\| + \|w\|)$, где $m(t)$ – неотрицательная суммируемая на $T = [t_0, t_1]$ функция.

Предполагая выполненными условия существования и единственности траекторий системы (1) при заданном $u(\cdot) \in U_T$ в каждый момент времени $t \in T$ определим множество

$$X(t, D, u(\cdot), W_T) = \{x(t, x^0, u(\cdot), w(\cdot)) \,|\, x^0 \in D, u(\cdot) \in U_T, w(\cdot) \in W_T\}, \tag{2}$$

объединяющее концов в момент времени $t \in T$ всех траекторий системы при всевозможных значениях начального состояния и внешних возмущающих сил. Многозначное отображение $t \to X(t, D, u(\cdot), W_T), t \in T$ называется ансамблем траекторий системы (1), порожденным множеством начальных состояний D, управлением $u(\cdot) \in U_T$ и множеством внешних воздействий W_T.

Для системы (1) представляет интерес также семейство $H(D, u(\cdot), W_T)$ всех абсолютно непрерывных траекторий $x(t, x^0, u(\cdot), w(\cdot)), t \in T$, соответствующих управлению $u(\cdot) \in U_T$ и всевозможным парам $(x^0, w(\cdot)) \in D \times W_T$. При заданных выше условиях на правую часть уравнения (1) множество $H(D, u(\cdot), W_T)$ является предкомпактным множеством пространства непрерывных на $T = [t_0, t_1]$ n-вектор функций $C^n(T)$ с нормой $\|x(\cdot)\|_{C^n(T)} = \max_{t \in T} \|x(t)\|_{R^n}$. При дополнительном условии выпуклости и замкнутости множества $f(t, x, u, W) = \bigcup_{w \in W} f(t, x, u, w)$ семейство $H(D, u(\cdot), W_T)$ будет компактом пространства $C^n(T)$. При более сильных условиях можно получить выпуклость множества $H(D, u(\cdot), W_T)$. Таким достаточным условием является вогнутость опорной функции $C(f(t,x,u,W),\psi)=\sup\limits_{w\in W}(f(t,x,u,w),\psi),\psi\in R^n$ по переменной $x\in\bigcup\limits_{u(\cdot)\in U_T}X(t,D,u(\cdot),W_T)$ и выпуклость компакта D [8],[9]. Как нетрудно заметить, что из выпуклости и компактности множества $H(D,u(\cdot),W_T)$ следует выпуклость и компактность множеств $X(t,D,u(\cdot),W_T),t\in T$.

Все эти приведенные свойства ансамбля траекторий $X(t,D,u(\cdot),W_T),t\in T$ и семейства абсолютно непрерывных траекторий $H(D,u(\cdot),W_T)$ можно получить как следствие из результатов теории дифференциальных включений. Чтобы убедится на этом нам достаточно представить рассматриваемую систему управления в виде управляемого дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt}\in F(t,x,u),t\in T, \tag{3}$$

где $F(t,x,u)=f(t,x,u,W)$. При сделанных на правую часть уравнения (1) допущениях, рассматриваемая система управления в условиях неполноты информации о параметрах $w\in W$ описывается дифференциальным включением (3). Этому легко убедится, используя результаты теории дифференциальных включений и известную лемму Филиппова из теории многозначных отображений [9].

2Б. Линейное управляемое дифференциальное включение. Рассмотрим систему с неполными данными, которая описывается дифференциальным включением с параметром управления:

$$\frac{dx}{dt}\in A(t)x+B(t,u),t\in T. \tag{4}$$

где $x-n$-вектор состояния, $u-m$-вектор управления со значениями из компакта $U\subset R^m$, $A(t)$ – $n\times n$-матрица, $B(t,u)$ – непустой компакт из R^n.

На правую часть дифференциального включения (4) будем налагать следующие условия: 1) элементы матриц $A(t)$ суммируемы на $T=[t_0,t_1]$; 2) отображение $(t,u)\to B(t,u)$ измеримо по $t\in T$ и непрерывно по $u\in U$, причем $\mathop{Sup}\limits_{\gamma\in b(t,u)}\|\gamma\|\le\beta(t),\ \forall(t,u)\in T\times V$, где $\beta(t)$ –суммируемая на *T* функция. При этих условиях каждому измеримому управлению $u=u(t),t\in T$ из множества допустимых управлений U_T и начальному условию и $x(t_0)=x^0$ соответствует абсолютно непрерывные решения (траектории) $x=x(t,x^0,u(\cdot))$ дифференциального включения (4) . Пусть $H(D,u(\cdot))$ – множество абсолютно непрерывных траекторий $x=x(t,x^0,u(\cdot))$ дифференциального включения (4), соответствующих управлению $u(\cdot)\in U_T$ и всевозможным начальным состояниям $x(t_0)=x^0$ из заданного компакта: $x(t_0)\in D$. Приведенные условия достаточны для выпуклости и предкомпактности множества $H(D,u(\cdot))\subset C^n(T)$. При дополнительном условии выпуклости значений многозначного отображения $(t,u)\to B(t,u)$ и выпуклости компакта D множество

$H(D,u(\cdot))$ является выпуклым компактом из $C^n(T)$. Эти свойства легко следует из результатов теории управляемых дифференциальных включений [13],[14].

Теперь рассмотрим ансамбль траекторий дифференциального включения (4), т.е. многозначное отображение $t \to X(t,D,u(\cdot)), t \in T$, определяемое как $X(t,D,u(\cdot)) = \{\xi \in R^n : \xi = x(t), x(\cdot) \in H(D,u(\cdot))\}, t \in T$. Из компактности и выпуклости множества $H(D,u(\cdot))$ следует компактность и выпуклость значений многозначного отображения $t \to X(t,D,u(\cdot)), t \in T$. Однако, свойства выпуклости и замкнутости множеств достижимости $X(t,D,u(\cdot)), t \in T$ дифференциального включения (4) имеют места без предположения выпуклости значений многозначного отображения $(t,u) \to B(t,u)$, если только потребовать выпуклость и компактность начального множества D. Это утверждение вытекает из следующего представления множества достижимости [13]:

$$X(t,D,u(\cdot)) = F(t,t_0)D + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)B(\tau,u(\tau))d\tau, \qquad (5)$$

где $F(t,\tau)$ –фундаментальная матрица решений уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ F(\tau,\tau) = E$ (E – единичная матрица). Из теории многозначных отображений следует, что при выполнении приведенных условий на многозначное отображение $(t,u) \to B(t,u)$ интеграл $\int_{t_0}^{t} F(t,\tau)B(\tau,u(\tau))d\tau$ является непустым выпуклым компактом из R^n.

В (5) множество $X(t,D,u(\cdot)), t \in T$ представлено как алгебраическая сумма двух множеств. При компактности начального множества D множество $F(t,t_0)D$ также будет компактом R^n, при дополнительном условии выпуклости D, – выпуклым компактом. Следовательно, при выуклой компактности начального множества D множество достижимости является выпуклым компактом из R^n.

В дальнейшем будем предполагать, что начальное множество D является выпуклым компактом. Тогда, учитывая сказанное выше и используя свойства опорных функций, можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1. Множество достижимости $X(t,D,u(\cdot)), t \in T$ является выпуклым компактом R^n, причем его опорная функция выражается формулой:

$$C(X(t,D,u(\cdot)),\psi) = C(F(t,t_0)D,\psi) + \int_{t_0}^{t} C(F(t,\tau)B(\tau,u(\tau)),\psi)d\tau, \psi \in R^n. \qquad (6)$$

2B. Задача управления ансамблем траекторий по терминальному функционалу. Для моделей вида (4) одним из важных вопросов является задача управления ансамбля траекторий по некоторому критерию оптимизации. Одним из таких критериев, часто используемых в задачах оптимизации, является терминальный функционал $J(x(\cdot)) = g(x(t_1))$, $x(\cdot) \in H(D, u(\cdot))$, где $g(\xi)$ – заданная функция аргумента $\xi \in R^n$. Гарантированным значением данного функционала для системы (4) назовем величину $\Phi(D, u(\cdot)) = \sup\limits_{x(\cdot)\in H(D,u(\cdot))} J(x(\cdot))$. Учитывая вид терминального функционала $J(x(\cdot)) = g(x(t_1))$, нетрудно заметить, что $\Phi(D, u(\cdot)) = \sup\limits_{\xi \in X(t_1, D, u(\cdot))} g(\xi)$.

Приведем два результата для $\Phi(D, u(\cdot)) = \sup\limits_{\xi \in X(t_1, D, u(\cdot))} g(\xi)$, когда терминальный функционал $J(x(\cdot)) = g(x(t_1))$ определяется выпуклыми или вогнутыми функциями $g(\xi)$, $\xi \in R^n$.

Лемма 2. Пусть $g(\xi)$, $\xi \in R^n$ – выпуклая функция, а $g^*(l)$ – ее сопряженная функция. Тогда:

$$\Phi(D, u(\cdot)) = \sup_{l \in R^n} \left[C(X(t_1, D, u(\cdot)), l) - g^*(l) \right]. \tag{7}$$

Лемма 3. Пусть $g(\xi)$, $\xi \in R^n$ – вогнутая функция. Тогда:

$$\Phi(D, u(\cdot)) = \inf_{l \in R^n} \left[C(X(t_1, D, u(\cdot)), l) + (-g)^*(-l) \right]. \tag{8}$$

Формулу (7) легко можно получит, используя выражение выпуклой функции через его сопряженной $g(\xi) = \sup\limits_{l \in R^n} [(\xi, l) - g^*(l)]$, и свойств сопряженной функции. Формула (8) получается из (7) как следствие, если учесть, что функция $p(\xi) = -g(\xi)$ – выпуклая при вогнутости функции $g(\xi)$, $\xi \in R^n$. Подробные доказательства этих утверждений можно найти в [13].

Теперь рассмотрим следующую задачу управления ансамблем траекторий системы (4):

$$\Phi(D, u(\cdot)) = \sup_{\xi \in X(t_1, D, u(\cdot))} g(\xi) \to \min, u() \in U_T. \tag{9}$$

Предположим, что в задаче (9) функция $g(\xi)$, $\xi \in R^n$ имеет вид

$$g(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \min_{z \in Z_i} \max_{m \in M_i} (z, P_i \xi + m), \tag{10}$$

где P_i – $s_i \times n$-матрица, Z_i и M_i – компактные подмножества R^{s_i}. Данную функцию можно записать так:

$$g(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \min_{z_i \in Z_i} [(z_i, P_i \xi) - \max_{m \in M_i} (m, -z_i)] = \min_{z_i \in Z_i, i=\overline{1,N}} \sum_{i=1}^{N} [(P_i' z, \xi) - C(M_i, -z_i)].$$

Из такого представления ясно, что функция $g(\xi)$ является негладкой функцией типа минимума.

3.РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Задача (9) является минимаксной задачей терминального управления ансамбля траекторий системы (4). Изучим необходимые и достаточные условия оптимальности в данной задаче, когда терминальный функционал имеет вид (10).

В рассматриваемой задаче терминальный функционал $g(\xi)$, $\xi \in R^n$ обладает свойством вогнутости. Поэтому для задачи (9) можно применить условия оптимальности, полученных для такого типа задач с вогнутыми терминальными функционалами [13]. В задачах оптимизации для управляемых дифференциальных включений для получения условий оптимальности могут быть использованы представления (7) или (8).

Однако, учитывая специфику задания терминальной функции (10), мы будем использовать другое представление функционала $\Phi(D,u(\cdot)) = \sup\limits_{\xi \in X(t_1,D,u(\cdot))} g(\xi)$, которое получается после применения известной теоремы о минимаксе из выпуклого анализа [5, с.286],[6]:

$$\Phi(D,u(\cdot)) = \min_{z \in coZ} \sum_{i=1}^{N} [C(X(t_1,D,u(\cdot)),P_i'z_i) - C(M_i,-z_i)], \tag{11}$$

где coZ – выпуклая оболочка множества $Z = Z_1 \times Z_2 \times \cdots Z_N$.

Учитывая формулу (6), равенство (11) запишем в следующем виде:

$$\Phi(D,u(\cdot)) = \min_{z \in coZ} \sum_{i=1}^{N} [C(F(t_1,t_0)D,P_i'z) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)B(t,u(t)),P_i'z)dt]. \tag{12}$$

Пусть $\psi(t,z_i)$ – абсолютно непрерывное решение уравнения $\dfrac{d\psi}{dt} = -A'(t)\psi$ с начальным условием $\psi(t_1) = P_i'z_i$. Такая функция имеет представление $\psi(t,z_i) = F'(t_1,t)P_i'z_i$. Тогда равенство (12) можем записать в виде:

$$\Phi(D,u(\cdot)) = \min_{z \in coZ} \sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i)) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u(t)),\psi(t,z_i))dt]. \tag{13}$$

Теорема 1. Пусть $u^0(t), t \in T$ – оптимальное управление в задаче (9). Тогда почти для всех $t \in T$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{N} C(B(t,u^0(t)),\psi_i^{\,0}(t)) = \min_{u \in U} C(B(t,u),\psi_i^{\,0}(t)), \tag{14}$$

где $\psi_i^{\,0}(t) = \psi(t,z_i^{\,0})$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0, ..., z_N^0)$ – произвольная точка глобального минимума функции

$$\eta^0(z) = \sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i)) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z_i))dt \tag{15}$$

на множестве coZ.

Доказательство. Если $u^0(t), t \in T$ – оптимальное управление в задаче (9), то $\Phi(D,u^0(\cdot)) \le \Phi(D,u(\cdot)) \quad \forall u(\cdot) \in U_T$, т.е. согласно (12)

$$\begin{aligned} &\min_{z \in coZ} \sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i)) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z_i))dt] \le \\ &\le \min_{z \in coZ} \sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i)) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u(t)),\psi(t,z_i))dt], \forall u(\cdot) \in U_T. \end{aligned} \tag{16}$$

Функция $\eta^0(z)$, $z \in R^{s_1} \times R^{s_2} \times \cdots R^{s_N}$, определенная формулой (15), является непрерывной, и поэтому существует z^0 – точка глобального минимума этой функции на выпуклом компакте coZ. Учитывая это, из (16) получим

$$\sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i^{\ 0})) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z_i^{\ 0}))dt] \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i^{\ 0})) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u(t)),\psi(t,z_i^{\ 0}))dt], \forall u(\cdot) \in U_T .$$

Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z_i^{\ 0}))dt = \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} \sum_{i=1}^{N} C(B(t,u),\psi(t,z_i^{\ 0}))dt .$$

Теперь, пологая $\psi_i^{\ 0}(t) = \psi(t,z_i^{\ 0})$, и используя свойств интеграла Лебега, из последнего равенства получим, что почти для всех $t \in T$ имеет место равенство (14).

Лемма 4. Если $u^0(t), t \in T$ – оптимальное управление в задаче (9), то каждая точка глобального минимума $z^0 \in coZ$ функции (15) является, точкой глобального минимума функции

$$\mu(z) = \sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i)) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} C(B(t,u)),\psi(t,z))dt], z \in coZ . \qquad (17)$$

Утверждение леммы следует из следующей цепочки соотношений:

$$\min_{u(\cdot)} \Phi(D,u(\cdot)) = \eta^0(z^0) = C(D,\psi(t_0,z^0)) + C(M,z^0) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z^0))dt \ge$$

$$\ge C(D,\psi(t_0,z^0)) + C(M,z^0) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U} C(B(t,u),\psi(t,z^0))dt = \mu(z^0) \ge \min_{z \in coZ} \mu(z) = \min_{u(\cdot) \in U_T} \Phi(D,u(\cdot)).$$

Теорема 2. Для оптимальности управления $u^0(t), t \in T$ в задаче (9) необходимо и достаточно существование $z^0 \in coZ$ – точки глобального минимума функции $\mu(z)$ вида (17) и выполнения условия (14) почти для всех $t \in T$.

Доказательство. ***Необходимая часть*** теоремы следует из теоремы 1 и леммы 4.

Достаточность. Пусть $z^0 \in coZ$ – точка глобального минимума функции $\mu(z)$, а управление $u^0(t), t \in T$ почти для всех $t \in T$ удовлетворяет условию (14). Тогда:

$$\sum_{i=1} \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z_i^{\ 0}))dt] = \min_{u(\cdot) \in U_T} \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u(t)),\psi(t,z_i^{\ 0}))dt .$$

Учитывая полученное равенство, в силу представления (13) имеем:

$$\Phi(D,u^0(\cdot)) = \min_{z \in coZ} \sum_{i=1}^{N} [C(D,\psi(t_0,z_i)) - C(M_i,-z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z_i))dt] \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} C(D,\psi(t_0,z_i^{\ 0})) - C(M_i,-z_i^{\ 0}) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z_i^{\ 0}))dt = \min_{z \in coZ} \mu(z).$$

Поскольку $\min_{z \in coZ} \mu(z) = \min_{u(\cdot) \in U_T} \Phi(D, u(\cdot))$, то из полученных соотношений следует, что $\Phi(D, u^0(\cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U_T} \Phi(D, u(\cdot))$, т.е. $u^0(t), t \in T$ – оптимальное управление в задаче (9).

4.ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные условия оптимальности в минимаксной задаче (9) управления ансамбля траекторий системы (4) показывают, что для построения оптимального управления следует сначала разрешение конечномерной задачи оптимизации: $\mu(z) \to \min, z \in coZ$. Если $z^0 \in coZ$ – решение этой задачи, то оптимальное управление $u^0(t), t \in T$ определяется из условия (14), как результат решения параметризованной задачи оптимизации:

$$\sum_{i=1}^{N} C(B(t,u), \psi_i^{\,0}(t)) \to \min, u \in U, t \in T .$$

Итак, проведенные исследования позволили приведения решения бесконечномерной задачи негладкой оптимизации, сформулированной как задачи управления ансамбля траекторий динамической системы в условиях неполноты информации, к двум последовательно решаемых задачам конечномерной оптимизации. Следует отметить, что для решения этих задачи существует хорошо развитый математический аппарат в виде методов математического программирования.

5. Список литературы//References//

[1]. Clarke F. Optimization and nonsmooth analysis, Willey & Sons, Ney York, 1983.

[2]. Кейн В.Н. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. – М.: Наука, 1985. // Kane V.N. Optimization of control systems by minimax criterion. Moskow, Nauka, 1985//.

[3]. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация–М.: Наука, 1981 //Demyaanov V. F., Vasilyev L.V. Nondifferential optimization. Moskow, Nauka, 1981 //.

[4].Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.– М.: Наука ,1990. // Demyanov V.F., Rubinov A.M. Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus. Moskow, Nauka, 1990.

[5].Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости . -М: Наука, 1977.// Kurzhanskiy A.B. Control and observation under conditions of indeterminacy. Moskow, Nauka, 1977//.

[6]Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи –М.: Наука, 1980. //Pshenichny B.N. Convex analysis end extremal problem. Moskow. Nauka, 1980 //

[7].Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и управление. Труды математического института АН СССР. – 1985. –169. – с. 194-252. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F . Differential inclusions and optimal control. Proceedings of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR, V.169, 1985. - p. 194-252.

[8].Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений //Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions.// –М.: КомКнига, 2005. // Borisovich Yu.G ., Gelman BD, Myshkis AD, Obukhovsky VV . Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. -M.: Komkniga, 2005.//

[9].Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциалные включения // Multivalued analysis and differential inclusions//. М.: Физматлит, 2015.

[10].Минченко Л.И., Тараканов А.Н. Методы многозначного анализа в исследовании задач управления дифференциальными включениями с запаздыванием. Доклады БГУИР, 2004,№1. – с. 27-37. // Minchenko L.I, Tarakanov A.N. Methods of multivalued analysis in the study of control problems for differential inclusions with delay. Reports of BSUIR, No. 1, 2004. - p. 27-37.//

[11].Plotnikov A.V., Komleva T.A. Piecewise constant controlled linear fuzzy differential inclusions. Universal Journal of Applied Mathematics. 2013, 1(2).– pp. 39-43.

[12].Otakulov S. On the minimization problem of reachable set estimation of control system. IFAC Workshop on Generalized Solution in Control Problems(GSCP-2004). Pereslavl-Zalessky, Russia, September 22-26, 2004. – p. 212-217.

[13].Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. LAP: Lambert Academic Publishing, 2019. // Otakulov S. Problems of control of an ensemble of trajectories of differential inclusions. LAP: Lambert Academic Publishing, 2019. //.

[14].Otakulov S., Sobirova G.D. On the model of control systems under conditions of indeterminacy. International conference «Mathematical analisis and its applications to mathematical physics». September 17-20, 2018, Samarkand, Uzbekistan. Abstracts. Part II. –pp. 109-110.

[15].Отакулов С., Рахимов Б.Ш. Об условиях управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений. Physical and mathematical scinces. Vol. 3, Issue 1. pp.45-50. // Otakulov S.,Rahimov B.Sh. About conditions controllability an ensemble trajectories. Physical and mathematical scinces. Vol. 3, Issue 1. pp.45-50. //

[16].Otakulov S., Rahimov B. Sh. On the structural properties of the reachability set of a differential inclusion. Proceedings of International Conference on Research Innovations in Multidisciplinary Sciences, March 2021. New York, USA. pp. 150-153.

[17].Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. The nonsmoth optimal control problem for ensamble of trajectories of dynamic system under conditions of indeterminacy. Middle European Scientific Bulletin, vol. 5, October 2020. pp. 38-42.

[18].Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. Conditions of optimality in the nonsmooth minimax control problem. Proceedings of International scientific and practical conference “Cutting edge-science”, July, 2020, Shawnee, USA. pp. 111-114.

[19].Otakulov S., Sobirova G. D., Abdiyeva H. S. Minimax Control Problem For Differential Inclusion With Uncertainty Parameter. Turkish Online Journal of Qualitative

Inquiry (TOJQI). Volume 12, Issue 6, June 2021. pp.4552- 4560.

[20].Warga J. Optimal control of differential and functional equations. Academic pres, New York and London, 1975.