



International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research

Journal home page:
<https://journal.jbnuu.uz/>



A NEW INTERPRETATION OF THE PROOF OF BINARY RELATIONS AND REFLECTIONS

Murtazakul Dosanov¹

Ganisher Nafasov²

Rustam Khudoykulov³

Gulistan State University

KEYWORDS

set, predicate, relation,
reflection, injective,
surjective, bijective,
function, inductive,
reflexive, symmetric,
transitive, equivalence

ABSTRACT

This article presents a new interpretation of the proof of binary relations and reflections types of definition of reflection, reverse reflection, non-traditional definition of reflection, provides a more visual proof of some properties in the traditional definition.

2181-3884/©2023 in Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan.

DOI: 10.5281/zenodo.7867691

This is an open access article under the Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

¹ Senior Lecturer of the Department of Mathematics, Gulistan State University, Uzbekistan, dasanovmurtazaqul@gmail.com

² Doctor of Philosophy (Ph.D.) in Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Gulistan State University, Uzbekistan, gnafasov87@gmail.com

³ Lecturer of the Department of Mathematics, Gulistan State University, Uzbekistan, xudoyqulovrustam90@gmail.com

BINAR MUNOSABATLAR VA AKSLANTIRISHLARNING ISBOTLANISHINING YANGICHA TALQINI

KALIT SO'ZLAR/ КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

To'plam, predikat,
munosabat, akslantirish,
in'yektiv, sur'yektiv,
biyektiv, funksiya,
induksiya, refleksiv,
simmetrik, tranzitiv,
ekvivalentlik

ANNOTATSIYA/АННОТАЦИЯ

Ushbu maqolada binar munosabatlar va akslantirishlarning isbotlanishining yangicha talqini akslantirish ta'rifining turlari, teskari akslantirish, akslantirishning no'anaviy ta'rifi keltirilgan bo'lib, an'anaviy ta'rifdagi ayrim xossalari ancha yaqqol isboti keltirilgan.

Kirish. Biz o'rganadigan barcha obektlar ularni har xil nomlar bilan atalishiga qaramasdan : so'zlar, simvollar, majmualar, sonlar, funksiyalar, formulalar va boshqalar to'plamlar bo'ladilar. Intuitiv nuqtai nazardan albatta hamma matematik obyektlar to'plamlar emas, masalan qavslar haqida yoki propozitsional o'zgaruvchilarni to'plamlar kabi tushunish qiyin. Biroq munosib kelishuv (belgilash) orqali ularni to'plam bilan aynan bir narsa deb qarash mumkin. Xususan qavsni $\{\{\emptyset\}\}$ to'plam bilan aynan bir narsa deb qarash mumkin. Bu usul sermaxsul bo'lib bu maqolada ham shunday kelishuv qabul qilinadi. To'plamlar nazariyasining aksiomasi sifatida biz ekstensionallik aksiomasini qabul qilamiz , u bir xil elementga ega bo'lgan ikki to'plamni teng deb tasdiqlaydi-boshqacha aytganda ixtiyoriy to'plam o'zining elementlari bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ - A to'plamning hamma elementlari bo'lsa, u holda ekstensionallik aksiomasiga muvofiq A to'plamni $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ orqali belgilaymiz. Shu bilan birga $a_1, a_2, \dots, a_n$ lardan ixtiyoriy ikkitasi har xil deb faraz qilinmaydi. Tushinarliki bunda bitta A to'plam shunday ko'p belgilashlarga ega bo'lishi mumkin masalan, $\{a, b, a\} = \{a, b, b\} = \{a, b\} = \{b, a\}$. $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, va hakazo to'plarni (har qaysi keyingisi barcha oldingilaridan tashkil topgan) natural sonlar deb ataladi va mos ravishda 0,1,2 va hakazo orqali belgilanadi. Barcha natural sonlar to'plami ω orqali belgilaymiz.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ so'zlar va $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ chekli ketma-ketliklar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ elementlarning tartiblangan $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ nabori bilan aynan bir narsa deb qaraladi uni hozir n bo'yicha induksiya bilan aniqlaymiz.

- Tadqiqot metodologiyasi. Ta'rif. Bo'sh to'plam elementlarining tartiblangan nabori $\langle \rangle$ $\emptyset$ to'plamga teng. Bitta a elementning tartiblangan nabori $\langle a \rangle$ esa a teng. Ikkita a va b elementlarning tartiblangan nabori $\langle a, b \rangle$ tartiblangan juftlik deb ataladi va $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ga teng. Agar $n > 2$ bo'lsa u holda $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlarning tartiblangan nabori $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ tartiblangan $\langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$ juftlikka tengdir.

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ tartiblangan naborni ba'zan kortej deb ataymiz n soni esa $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ kortej uzunligi deb ataymiz, shu bilan birga bo'sh kortej uzunligi deb ataymiz, shu bilan birga $\langle \rangle$ bo'sh kortej uzunligi nolga teng. $n > 2$ uzunlikka ega kortejni tartiblangan n -lik yoki oddiygina n -lik deb ataymiz (uchlik, to'rtlik va hakazo). So'zlarni va ketma-ketliklarni tartiblangan nabor bilan aynan bir narsa deb qarash ushbu jumlag muvofiq mumkin.

Jumla 2.1.1. Agar $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ bo'lsa u holda $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Isbot. Tartiblangan nabor ta'rifidan bunda jumlaning $n = 2$ uchun isbotlash yetarliligi kelib chiqadi. $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ shartlardan va tartiblangan juftlik ta'rifidan quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\{a_1\} \in \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle \text{ va } \langle b_1, b_2 \rangle = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$$

bo'lganidan u holda $\{a_1\} = \{b_1\}$ yoki $\{a_1\} = \{b_1, b_2\}$, shuning uchun $b_1 \in \{a_1\}$ yoki $b_1 \in \{a_1\}$ ya'ni $b_1 = a_1$. Agar $\{x, y\} = \{x, z\}$ bo'lsa u holda $y = z$ bo'lishini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan ham, agar $\{x, y\} = \{x, z\}$ bo'lsa, u holda $y = x$ yoki $y = z$ bo'ladi. Agar $y = z$ bo'lsa, u holda tasdiq to'g'ri. Agar $y = x$ bo'lsa, u holda $\{x, z\} = \{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$ dan $z = x$ bo'lishi ya'ni $y = z$ ekanligi kelib chiqadi. Unda o'rnatilgan $a_1 = b_1$ tenglikdan $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$ ekanligidan $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, b_2 \rangle$ bo'lishi kelib chiqadi.

$\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \{\{a_1\}, \{a_1, b_2\}\}$ bu yerdan $\{a_1, a_2\} = \{a_1, b_2\}$ tenglikni keyin esa $a_2 = b_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan tashqari $n > 2$ da $n - 1 > 1$ bo'lib, $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \Rightarrow \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle = \langle \langle b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \rangle, b_n \rangle \Rightarrow \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \rangle$ va $a_n = b_n$. Unda induksiya faraziga ko'ra $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n = b_n$ bo'lishi kelib chiqadi.[1]

Ta'rif. a) $\{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ to'plamni $A_1, \dots, A_n$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb ataladi va $A_1 \times \dots \times A_n$ orqali belgilanadi.

Agar $X \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ bo'lsa u holda $a \in A_i$ barcha a elementlar to'plamini, qaysiki ular uchun shunday $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ elementlar mavjud bo'lib bunda $\langle a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle \in X$ bo'lsa X to'plam proyeksiyasi deb ataladi va $\pi_i^n X$ orqali belgilanadi

ya'ni $\pi_i^n X = \{a \in A_i \mid a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \text{ lar mavjud bo'lib bunda } \langle a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle \in X\}$

b) Agar $A_1 = \dots = A_n = A$ bo'lsa u holda $A_1 \times \dots \times A_n$ ko'paytmani A to'plamning dekart n -darajasi deb ataladi va A^n orqali belgilanadi. Agar $n = 0$ bo'lsa u holda ta'rifga muvofiq $A^0 = \{\emptyset\}$ deyimiz.

c) $B \subseteq A^n$ qism to'plamni A ga n -o'rinli munosabat yoki predikat deb ataladi. Agar

B -birorta A to'plam uchun A ga n -o'rinli munosabat bo'lsa u holda B ni n -o'rinli munosabat yoki predikat deb ataymiz.

d) Agar B -ikki o'rinli munosabat bo'lsa u holda ikki o'rinli munosabat $\{ \langle a, b \rangle \mid \langle b, a \rangle \in B \}$ ni B ga teskari munosabat deb ataymiz va B^{-1} orqali belgilaymiz.

e) Agar B, C -ikkita ikki o'rinli munosabat bo'lsa u holda ikki o'rinli munosabat $\{ \langle a, c \rangle \mid \langle a, b \rangle \in B \text{ va } \langle b, c \rangle \in C, \text{ birorta } b \text{ uchun} \}$ ni ikki o'rinli B, C munosabatlarning kompozitsiyasi yoki ko'paytmasi deb ataladi (BC) yoki BC orqali belgilanadi.

$\langle a \rangle = a$ bo'lganligi tufayli $A^1 = A$ shuning uchun A ning qism to'plami A ga bir o'rinli predikat bo'ladi. Ko'ramizki bunda 0 -o'rinli predikatlar faqat ikkita: $\emptyset$ va $\{\emptyset\}$ chunki $A^0 = \{\emptyset\}$ va u hammasi bo'lib ikkita qism to'plamga ega $\emptyset \subseteq A^0$ va $\{\emptyset\} \subseteq A^0$. B^{-1} ta'rifidan darhol ushbu tenglik kelib chiqadi: $B = (B^{-1})^{-1}$ haqiqatdan ham $\langle a, b \rangle \in B \Leftrightarrow \langle b, a \rangle \in B^{-1} \Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in (B^{-1})^{-1}$ ya'ni $B = (B^{-1})^{-1}$.

2.1.2. Jumla. Agar B, C va D ikki o'rinli predikatlar bo'lsa, u holda

$$a) ((BC)D) = (B(CD))$$

$$b) (BC)^{-1} = (C^{-1}B^{-1})$$

Isbot. a) $\langle x, y \rangle \in ((BC)D)$ bo'lsin, unda birorta v uchun $\langle x, v \rangle \in (BC)$ va $\langle v, y \rangle \in D$ ega bo'lamiz va shuning uchun birorta u uchun $\langle x, u \rangle \in B$ va $\langle u, v \rangle \in C$ larga ega bo'lamiz ya'ni birorta u va v lar uchun $\langle x, u \rangle \in B$, $\langle u, v \rangle \in C$ va $\langle v, y \rangle \in D$ larga ega bo'lamiz, shunday qilib $\langle u, y \rangle \in CD$ va $\langle x, y \rangle \in B(CD)$ ya'ni $(BC)D \subseteq B(CD)$ qism bo'lishiga ega bo'lamiz. $B(CD) \subseteq (BC)D$ qism bo'lishi xuddi shunday isbot qilinadi.

$\langle x, y \rangle \in (B(CD))$ bo'lsin. Unda birorta u uchun $\langle x, u \rangle \in B$ va $\langle u, y \rangle \in (CD)$ ega bo'lamiz va shuning uchun birorta v uchun $\langle u, v \rangle \in C$ va $\langle v, y \rangle \in D$ larga ega bo'lamiz ya'ni birorta u va v lar uchun $\langle x, u \rangle \in B$, $\langle u, v \rangle \in C$ va $\langle v, y \rangle \in D$ larga ega bo'lamiz. Shunday qilib $\langle x, v \rangle \in (BC)$ va $\langle x, y \rangle \in (BC)D$ ya'ni $B(CD) \subseteq ((BC)D)$ qism bo'lishiga ega bo'lamiz. Ikkita $(B(CD)) \subseteq ((BC)D)$ va $((BC)D) \subseteq (B(CD))$ qism bo'lishlaridan $((BC)D) = (B(CD))$ tenglikga ega bo'lamiz.

-Tahlil va natijalar. Isbot. b) $\langle x, y \rangle \in (BC)^{-1}$ ya'ni $\langle y, x \rangle \in BC$ shuning uchun birorta z uchun $\langle y, z \rangle \in B$, $\langle z, x \rangle \in C$ larga ega bo'lamiz, ya'ni $\langle z, y \rangle \in B^{-1}$ va $\langle x, z \rangle \in C^{-1}$ shuning uchun $\langle x, y \rangle \in C^{-1}B^{-1}$ ya'ni $(BC)^{-1} \subseteq C^{-1}B^{-1}$ qism bo'lishi isbotlandi.

Endi $\langle x, y \rangle \in C^{-1}B^{-1}$ bo'lsin. Shu sababli birorta z uchun $\langle x, z \rangle \in C^{-1}$ va $\langle z, y \rangle \in B^{-1}$ larga ega bo'lamiz ya'ni $\langle y, z \rangle \in B$ va $\langle z, x \rangle \in C$ shuning uchun $\langle y, x \rangle \in BC$ yoki $\langle x, y \rangle \in (BC)^{-1}$ ya'ni $C^{-1}B^{-1} \subseteq (BC)^{-1}$ qism bo'lishi isbotlandi. Ikkita

$(BC)^{-1} \subseteq C^{-1}B^{-1}$ va $C^{-1}B^{-1} \subseteq (BC)^{-1}$ qism bo'lishlardan $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ tenglikka ega bo'lamiz.

2.1.2 Jumlada isbotlangan kompozitsiyaning assosativligi $((BC)D) = (B(CD))$ ni (BCD) orqali belgilashga imkon beradi. Shu sababga ko'ra n ta predikatlarning kompozitsiyasi $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ bir qiymatli aniqlangandir. Ixtiyoriy predikatlar uchun kompozitsiyaning kommutativligi $(BC) = (CB)$ o'rinli emas ekanligini takidlab o'tamiz. Masalan, $B \subseteq R^2$ bu yerda R -haqiqiy sonlar to'plami va $C \subseteq R^2$ munosabatlarni quyidagicha aniqlaymiz.

$$B = \{ \langle x, y \rangle \mid y = x + 1, x \in R \} \subseteq R^2, \quad C = \{ \langle x, y \rangle \mid y = x^2, x \in R \} \subseteq R^2$$

Unda $BC = \{ \langle x, y \rangle \mid y = (x + 1)^2, x \in R \}$, $CB = \{ \langle x, y \rangle \mid y = x^2 + 1, x \in R \}$ shuning uchun $BC \neq CB$.

Ta'rif. A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabatni

a) Agar $\cup = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \}$ bo'lsa A^2 diagonal deb ataladi va id_A orqali belgilanadi;

b) Agar $id_A \subseteq \cup$ bo'lsa A da refleksiv deb ataladi;

c) Agar $\cup = \cup^{-1}$ bo'lsa A da simmetrik deb ataladi;

d) Agar $(\cup \cup) \subseteq \cup$ bo'lsa tranzitiv deb ataladi;

e) Agar $\cup$ refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa A da ekvivalentlik munosabati deb ataladi.

f) Agar $\cup \cap \cup^{-1} \subseteq id_A$ bo'lsa antisimmetrik deb ataladi.

A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat faqat va faqat shu holda qachonki $a \in A$ bo'lgan barcha a lar uchun $\langle a, a \rangle \in \cup$ bo'slagina refleksiv bo'ladi, chunki $a \in A$ barcha a lar uchun $\langle a, a \rangle \in id_A$ va $id_A \subseteq \cup$.

A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat faqat va faqat shu holda qachonki $\langle a, b \rangle \in \cup \Rightarrow \langle b, a \rangle \in \cup$ bo'lgandagina simmetrik bo'ladi, chunki agar $\langle a, b \rangle \in \cup$ bo'lsa u holda $\cup = \cup^{-1}$ bo'lgani tufayli $\langle a, b \rangle \in \cup^{-1} \Rightarrow \langle b, a \rangle \in \cup$.

Agar $\langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle b, c \rangle \in \cup \Rightarrow \langle a, c \rangle \in \cup$, u holda A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat tranzitiv munosabat bo'ladi. Chunki agar $\langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle b, c \rangle \in \cup \Rightarrow \langle a, c \rangle \in \cup \cup$ ammo $\cup \cup \subseteq \cup$ bo'lgani tufayli $\langle a, c \rangle \in \cup$. Agar $\langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle b, a \rangle \in \cup \Rightarrow a = b$ shart bajarilsa, u holda A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat antisimmetrik munosabat bo'ladi, chunki agar $\langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle b, a \rangle \in \cup \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle a, b \rangle \in \cup^{-1} \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup \cap \cup^{-1}$. Ammo $\cup \cap \cup^{-1} \subseteq id_A \Rightarrow \langle a, b \rangle \in id_A \Rightarrow a = b$. Masalan $\{ \langle m, n \rangle \mid m \text{ va } n \text{ o'zaro tub natural sonlar} \}$ predikati ω da simmetrik predikati bo'ladi,

ammo ω natural sonlar to'plamida refleksiv ham emas va tranzitiv ham emas. $\{ \langle m, n \rangle \mid (n - m) > 0, n, m \in \omega \}$ predikati esa ω da tranzitiv predikati bo'ladi ammo ω da simmetrik ham emas va refleksiv ham emas. Haqiqatan ham $\cup = \{ \langle m, n \rangle \mid m \text{ va } n \text{ o'zarotub natural sonlar} \}$. Agar

$\langle m, n \rangle \in \cup \Rightarrow (m, n) = 1, m, n \in \omega \Rightarrow (n, m) = 1 \Rightarrow (n, m) = 1, n, m \in \omega \Rightarrow \langle n, m \rangle \in \cup$
 $2 \in \omega$ va $(2, 2) = 2$ ya'ni $(2, 2) \neq 1$ shuning uchun $(2, 2) \notin \cup$. Demak $\cup$ predikati refleksiv emas. $\langle 2, 3 \rangle \in \cup$ chunki $(2, 3) = 1$ va $2, 3 \in \omega$, $\langle 3, 4 \rangle \in \cup$ chunki $(3, 4) = 1$ va $3, 4 \in \omega$ ammo $\langle 2, 4 \rangle \notin \cup$ chunki $(2, 4) = 2$ va $(2, 4) \neq 1$ ya'ni $\cup$ predikati tranzitiv bo'lmaydi.

$\cup = \{ \langle m, n \rangle \mid (n - m) > 0, m, n \in \omega \}$ predikat tranzitiv predikati bo'ladi, chunki $\langle m, n \rangle \in \cup$ va $\langle n, p \rangle \in \cup \Rightarrow (n - m) > 0, m, n \in \omega$ va $(p - n) > 0, n, p \in \omega \Rightarrow p - m = n - m + p - n > 0, m, p \in \omega \Rightarrow \langle m, p \rangle \in \cup$. $\langle 2, 3 \rangle \in \cup$ chunki $(3 - 2) > 0$ va $2, 3 \in \omega$

ammo $\langle 3, 2 \rangle \notin \cup$ chunki $2 - 3 = -1$ va $(2 - 3) > 0$ to'g'ri emas, shuning uchun $\cup$ predikati ω da simmetrik munosabat bo'lmaydi. $\langle 2, 2 \rangle \notin \cup$ chunki $2 - 2 > 0$ to'g'ri emas ya'ni $\cup$ predikati ω da refleksiv bo'lmaydi.

$\cup$ - A to'plamda n - o'rinli munosabat va $B \subseteq A$, u holda B to'plamdagi $\cup \cap B^n$ munosabatni $\cup$ munosabatning B to'plamdagi cheklanishi deb ataymiz. Ayonki, oldingi ta'rifdagi a) - e) tipdagi munosabatlarning ixtiyoriy $B \subseteq A$ qism to'plamdagi cheklanishlari ham shuningdek mos ravishda a) - e) tipdagi munosabatlar bo'ladi.

Agar A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat refleksiv bo'lsa, u holda $\cup \cap B^2 = \cup_1 - \cup$ munosabatning B to'plamdagi cheklanishi ham refleksiv bo'ladi, chunki agar $id_A \subseteq \cup$ bo'lsa, u holda $id_A \cap B^2 = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \} \cap B^2 = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in B \} = id_B$ va $id_B = id_A \cap B^2 \subseteq \cup \cap B^2 = \cup_1$ ya'ni $id_B \subseteq \cup_1$. Agar A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat simmetrik bo'lsa, u holda $\cup \cap B^2 = \cup_1 - \cup$ munosabatning B to'plamdagi cheklanishi ham simmetrik bo'ladi, chunki $\cup_1^{-1} = (\cup \cap B^2)^{-1} = \cup \cap B^2 = \cup_1$
 $\langle x, y \rangle \in (\cup \cap B^2)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \cup \cap B^2 \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \cup$ va $\langle y, x \rangle \in B^2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \cup$ va $\langle x, y \rangle \in B^2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \cup \cap B^2$ ya'ni

Agar A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat tranzitiv bo'lsa, u holda $\cup \cap B^2 = \cup_1 - \cup$ munosabatning B to'plamdagi cheklanishi ham tranzitiv bo'ladi, haqiqatdan ham agar $\langle a, b \rangle \in \cup_1 \cup_1$ bo'lsa, u holda birorta c uchun $\langle a, c \rangle \in \cup_1$ va $\langle c, b \rangle \in \cup_1 \Rightarrow \langle a, c \rangle \in \cup \cap B^2$ va $\langle c, b \rangle \in \cup \cap B^2$, $\langle a, c \rangle \in \cup$ va $\langle a, c \rangle \in B^2$ va $(\langle c, b \rangle \in \cup \text{ va } \langle c, b \rangle \in B^2) \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup \cup$ va

$\langle a, b \rangle \in B^2 B^2$. $\cup \subseteq \cup$ va $B^2 B^2 \subseteq B^2$ bo'lgani tufayli $\Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup$ va $\Rightarrow \langle a, b \rangle \in B^2$
 $\Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup \cap B^2 \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup_1$ ya'ni $\cup_1 \cup_1 \subseteq \cup_1$.

Agar A to'plamdagi $\cup$ ikki o'rinli munosabat A da ekvivalentlik munosabati bo'lsa, u holda $\cup$ munosabat A da refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'ladi, shuning uchun $\cup \cap B^2 = \cup_1 - B$ to'plamdagi $\cup$ munosabatning cheklanishi ham refleksif, simmetrik va tranzitiv bo'ladi ya'ni B da ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

$\langle a, b \rangle \in \cup_1 \cap \cup_1^{-1} \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup_1$ va $\langle a, b \rangle \in \cup_1^{-1} \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup_1$ va
 $\langle b, a \rangle \in \cup_1 \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup \cap B^2$ va $\langle b, a \rangle \in \cup \cap B^2 \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle a, b \rangle \in B^2$ va
 $\langle b, a \rangle \in \cup$ va $\langle b, a \rangle \in B^2 \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle b, a \rangle \in \cup$ va $\langle a, b \rangle \in B^2$ va
 $\langle b, a \rangle \in B^2 \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \cup$ va $\langle b, a \rangle \in \cup$ va $a \in B$ va $b \in B \Rightarrow a = b$ va
 $a, b \in B \Rightarrow \langle a, b \rangle \in id_B$ ya'ni $\cup_1 \cap \cup_1^{-1} \subseteq id_B$.

2.1.3 Misol. Agar $\bigcup_{i \in J} A_i = A$ va ixtiyoriy $i, j \in J$ uchun yo $A_i = A_j$ yoki $A_i \cap A_j = \emptyset$ bo'lsa $R = \{A_i | i \in J\}$ ni A to'plamning bo'laklanishi (bo'linishi) deb aytamiz.

A da quyidagi ikki o'rinli munosabatni aniqlaymiz.
 $E_R = \{\langle a, b \rangle | a, b \in A_i \text{ birorta } i \text{ uchun}\}$. Ayonki E_R A to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'ladi. $E_R \subseteq A^2$ chunki $\bigcup_{i \in J} A_i = A \Rightarrow A_i \subseteq A, a, b \in A_i \Rightarrow a, b \in A \Rightarrow \langle a, b \rangle \in E_R \Rightarrow \langle a, b \rangle \in A^2 \Rightarrow E_R \subseteq A^2$, $a \in A \Rightarrow a \in \bigcup_{i \in J} A_i \Rightarrow a \in A_i$ birorta $i \in J$ uchun $\Rightarrow a, a \in A_i$ birorta $i \in J$ uchun $\Rightarrow \langle a, a \rangle \in E_R$ ixtiyoriy $a \in A$ uchun $\Rightarrow id_A \subseteq E_R$ ya'ni E_R munosabat refleksivdir. $\langle a, b \rangle \in E_R \Rightarrow a, b \in A_i$ birorta $i \in J$ uchun $\Rightarrow b, a \in A_i$ birorta $i \in J \Rightarrow \langle b, a \rangle \in E_R$ ya'ni E_R munosabat simmetrikdir.

$\langle a, b \rangle \in E_R$ va $\langle b, c \rangle \in E_R \Rightarrow a, b \in A_i$ birorta $i \in J$ uchun va $b, c \in A_j$ birorta $j \in J$ uchun $\Rightarrow b \in A_i$ va $b \in A_j \Rightarrow A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow A_i = A_j \Rightarrow i = j$ va $a, c \in A_i \Rightarrow \langle a, c \rangle \in E_R$ ya'ni E_R munosabat tranzitivdir. A to'plamdagi ixtiyoriy ekvivalentlik munosabatini 2.1.3 misolda ko'rsatilgan usul bilan hosil qilish mumkinligini osongina ko'rsatish mumkin. Haqiqatdan ham $E - A$ da ekvivalentlik munosabati va $R_E = \{E_x | x \in A\}$ bo'lsin. E ning refleksivligidan ya'ni $x \in A$ ixtiyoriy x element uchun $\langle x, x \rangle \in E$ dan $x \in E_x$ kelib chiqadi, demak $x \in \bigcup_{x \in A} E_x = A$. E ning simmetrikligi va tranzitivligidan agar $\langle x, y \rangle \in E$ u holda $E_x = E_y$ bo'lishi kelib chiqadi chunki $z \in E_x \Rightarrow \langle z, x \rangle \in E$ va $\langle x, y \rangle \in E \Rightarrow \langle z, y \rangle \in E \Rightarrow z \in E_y$ ya'ni $E_x \subseteq E_y$ $z \in E_y \Rightarrow \langle z, y \rangle \in E$ va $\langle x, y \rangle \in E \Rightarrow \langle z, y \rangle \in E$ va $\langle y, x \rangle \in E \Rightarrow \langle z, x \rangle \in E \Rightarrow z \in E_x$ ya'ni $E_y \subseteq E_x$. Ikkita $E_x \subseteq E_y$ va $E_y \subseteq E_x$ qism

bo'lishlardan $E_x = E_y$ tenglikka ega bo'lamiz.

Agarda $\langle x, y \rangle \notin E$ bo'lsa u holda $E_x \cap E_y = \emptyset$ bo'ladi. Aksini faraz qilamiz $E_x \cap E_y \neq \emptyset$ bo'lsin. Unda shunday z mavjudki $z \in E_x$ va $z \in E_y \Rightarrow \langle z, x \rangle \in E$ va $\langle z, y \rangle \in E \Rightarrow \langle x, z \rangle \in E$ va $\langle z, y \rangle \in E \Rightarrow \langle x, y \rangle \in E$ zidiyat hosil qildik. Hosil qilingan zidiyat bunda agar $\langle x, y \rangle \notin E$ bo'lsa, u holda $E_x \cap E_y = \emptyset$ bo'lishini isbotlaydi. Shunday qilib E ekvivalentlik munosabati bo'yicha $R_E = \{E_x | x \in A\}$ ekvivalent sinflar to'plami A to'plamning bo'laklanishi bo'ladi va $E_{R_E} = E$.

Ta'rif. a) f -ikki o'rinli munosabatni agar ixtiyoriy a, b, c lar uchun $\langle a, b \rangle \in f$ va $\langle a, c \rangle \in f$ dan $b = c$ kelib chiqsa akslantirish yoki funksiya deb ataladi.

$\pi_1^2 f = \{x | \text{shunday } y \text{ mavjudki } (\langle x, y \rangle \in f)\}$ to'plamni f ning aniqlanish sohasi deb ataladi va $\text{dom} f$ orqali belgilanadi. $\pi_2^2 f = \{y | \text{shunday } x \text{ mavjudki } (\langle x, y \rangle \in f)\}$ to'plamni esa f ning qiymatlar sohasi deb ataladi va $\text{rang} f$ orqali belgilanadi.

b) Agar f^{-1} teskari munosabat ham akslantirish bo'lsa, f akslantirishni in'yektiv (yoki har xil qiymatli) akslantirish deb ataladi.

c) Agar $\text{dom} f = A$ va $\text{rang} f \subseteq B$ bo'lsa, u holda f akslantirishni A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi akslantirish deb ataladi.

d) Agar $\text{dom} f = A$ va $\text{rang} f = B$ bo'lsa, u holda f akslantirishni A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi sur'yektiv akslantirish (yoki A to'plamni B to'plam ustiga aks ettiruvchi akslantirish) deb ataladi.

f) Agar f akslantirish bir vaqtda ham in'yektiv, ham A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi sur'yektiv akslantirish bo'lsa, f akslantirishni A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish (yoki A to'plamni B to'plam ustiga aks ettiruvchi o'zaro bir qiymatli akslantirish) deb ataladi.

e) A^n to'plamni A to'plamga aks ettiruvchi f akslantirish A to'plamda n - o'rinli amal deb ataladi.

Ayonki A^2 to'plamning id_A diagonal A to'plamda biyektiv bir o'rinli amal bo'ladi. $f: A \rightarrow B$ yozuv bundan buyon A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi f akslantirish belgilanadi, $f: A \twoheadrightarrow B$ yozuv bilan A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi f in'yektiv akslantirish belgilanadi, $f: A \rightarrow\!\!\rightarrow B$ yozuv bilan A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi f sur'yektiv akslantirish belgilanadi. Quydagi jumlaning isboti [1] adabiyotda keltirilmagan.

2.1.4. Jumla. a) $f: A \rightarrow B$ va $g: B \rightarrow C$ bo'lsa u holda $(fg): A \rightarrow C$

b) Agar $f: A \rightarrow\!\!\rightarrow B$ va $g: B \rightarrow\!\!\rightarrow C$ bo'lsa u holda $(fg): A \rightarrow\!\!\rightarrow C$

c) Agar $f: A$ to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'lsa

$f^{-1} - B$ to'plamni A to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'ladi va $f \circ f^{-1} = id_A$ va $f^{-1} \circ f = id_B$.

d) Agar f va g -in'yektiv akslantirishlar bo'lsa, u holda $f \cdot g$ kompozitsiya ham shuningdek in'yektiv akslantirish bo'ladi va $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Isbot. $\langle a, b \rangle \in (fg), \langle a, c \rangle \in (fg)$ bo'lsin. Unda shunday c_1 va c_2 lar mavjudki $\langle a, c_1 \rangle \in f$ va $\langle c_1, b \rangle \in g$ hamda $\langle a, c_2 \rangle \in f$ va $\langle c_2, c \rangle \in g$ bo'ladi. $\langle a, c_1 \rangle \in f$ va $\langle a, c_2 \rangle \in f$ dan $c_1 = c_2$ kelib chiqadi chunki f funksiya. Unda $\langle c_1, b \rangle \in g$ va $\langle c_1, c \rangle \in g$ dan $b = c$ kelib chiqadi chunki g funksiya. Shunday qilib f va g funksiyalarning $f \cdot g$ kompozitsiyasi funksiya bo'lishi isbotlandi. Shartga ko'ra $f: A \rightarrow B$ va $g: B \rightarrow C$. Unda $domf = A, domg = B$ va $rangf \subseteq B, rangg \subseteq C$ bo'ldi.

Ikki o'rinli munosabatlar kompozitsiyasining ta'rifiga muvofiq shunday $\langle x, y \rangle$ tartiblangan juftliklar to'plamidan iboratki bunda birorta z uchun bir vaqtda $\langle x, z \rangle \in f$ va $\langle z, y \rangle \in g$ shartlar bajariladi. $x \in domfg \Rightarrow (y \text{ mavjudki } (\langle x, y \rangle \in (fg))) \Rightarrow (y \text{ mavjudki } (z \text{ mavjudki } (\langle x, z \rangle \in f \text{ va } \langle z, y \rangle \in g))) \Rightarrow x \in domf = A \text{ va } y \in rangg \subseteq C$. Demak $dom(fg) \subseteq domf = A$. $x \in A \Rightarrow x \in domf \Rightarrow y \text{ mavjudki } \langle x, y \rangle \in f \Rightarrow y \in rangf \Rightarrow y \in domg$ chunki $rangf \subseteq B = domg \Rightarrow z \text{ mavjudki } (\langle y, z \rangle \in g) \Rightarrow \langle x, z \rangle \in fg \Rightarrow x \in domfg$ ya'ni $A \subseteq domfg$ qism bo'lishi isbotlandi. Ikkita $A \subseteq domfg$ va $domfg \subseteq A$ lardan $domfg = A = domf$ tenglik kelib chiqadi. Bundan tashqari $y \in rang(fg) \Rightarrow (x \text{ mavjudki } (\langle x, y \rangle \in fg)) = (x \text{ mavjudki } (z \text{ mavjudki } (\langle x, z \rangle \in f \text{ va } \langle z, y \rangle \in g))) \Rightarrow y \in rangg$ ya'ni $rang(fg) \subseteq rangg \subseteq C$. Shunday qilib agar $f: A \rightarrow B$ va $g: B \rightarrow C$ u holda $(fg): A \rightarrow C$ isbotlandi. $\square$

Agar $f: A \rightarrow B$ va $g: B \rightarrow C$ bo'lsa u holda $domf = A$ va $rangf = B$ hamda $domg = B$ va $rangg = C$ bo'ladi.

Agar $f: A \rightarrow B$ va $g: B \rightarrow C$ bo'lsa u holda $(fg): A \rightarrow C$ ekanligini ya'ni $dom(fg) = A$ va $rang(fg) \subseteq C$ bo'lishini bilamiz. Shuning uchun $C \subseteq rang(fg)$ qism bo'lishini isbotlash kerak. $g: B \rightarrow C$ dan $rangg = C$ bo'lishi kelib chiqadi. $z \in C$ bo'lsin. $\Rightarrow z \in rangg \Rightarrow y \text{ mavjudki } (\langle y, z \rangle \in g) \Rightarrow y \in domg = B = rangf \Rightarrow y \in rangf \Rightarrow y \in rangf \Rightarrow x \text{ mavjudki } (\langle x, y \rangle \in f)$. Demak $\langle x, z \rangle \in fg \Rightarrow z \in rang(fg)$ ya'ni $C \subseteq rangfg$ Shuning uchun ikkita $rang(fg) \subseteq C$ va $C \subseteq rang(fg)$ lardan $rang(fg) = C$ tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib agar $f: A \rightarrow B$ va $g: B \rightarrow C$ bo'lsa, u holda $fg: A \rightarrow C$ isbotlandi. $\square$

c) Agar $f: A$ to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'lsa $f^{-1} - B$ to'plamni A to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'ladi va $f \circ f^{-1} = id_A$

va $f^{-1} \circ f = id_B$.

Agar $f: A \rightarrow B$ to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'lsa, u holda $f: A \rightarrow B$ va f^{-1} funksiyadir $\Rightarrow A = domf, B = rangf$. $y \in B$ bo'lsin $\Rightarrow y \in rangf \Rightarrow x$ mavjudki ($\langle x, y \rangle \in f$) $\Rightarrow \langle y, x \rangle \in f^{-1} \Rightarrow y \in domf^{-1}$ ya'ni $B \subseteq domf^{-1}$. $y \in domf^{-1} \Rightarrow x$ mavjudki ($\langle y, x \rangle \in f^{-1}$) $\Rightarrow \langle x, y \rangle \in f \Rightarrow y \in rangf \Rightarrow y \in B$ ya'ni $domf^{-1} \subseteq B$. Ikkita $B \subseteq domf^{-1}$ va $domf^{-1} \subseteq B$ qism bo'lishlardan $domf^{-1} = B$ tenglikka ega bo'lamiz.

$x \in A \Rightarrow x \in domf \Rightarrow y$ mavjudki ($\langle x, y \rangle \in f$) $\Rightarrow \langle y, x \rangle \in f^{-1} \Rightarrow x \in rangf^{-1}$ ya'ni $A \subseteq rangf^{-1}$ $x \in rangf^{-1} \Rightarrow y$ mavjudki ($\langle y, x \rangle \in f^{-1}$) $\Rightarrow \langle x, y \rangle \in f \Rightarrow x \in domf \Rightarrow x \in A$ ya'ni $rangf^{-1} \subseteq A$. Ikkita $A \subseteq rangf^{-1}$ va $rangf^{-1} \subseteq A$ qism bo'lishlardan $\Rightarrow rangf^{-1} = A$, f^{-1} funksiya bo'lgani uchun $f^{-1}: B \rightarrow A$. Bundan tashqari $(f^{-1})^{-1} = f$ funksiya shuning uchun u bir vaqtda B to'plamni A to'plamga in'yektiv va sur'yektiv akslantiruvchi akslantirish bo'ladi. Ya'ni $f^{-1}: B$ to'plamni A to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'ladi.

Endi $f: A$ to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi sur'yektiv akslantirish bo'lsin, unda $f^{-1} \circ f = id_B$. Isbot f funksiyaning teskarisi f^{-1} shunday ikki o'rinli $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in f \}$ munosabatdan iboratdir. Kompozitsiya ta'rifga muvofiq (1) $f^{-1} \circ f = \{ \langle y, z \rangle \mid x \text{ mavjudki } (\langle y, x \rangle \in f^{-1} \text{ va } \langle x, z \rangle \in f) \}$ $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ va $\langle x, z \rangle \in f$ lardan (2) $\langle x, y \rangle \in f$ va $\langle x, z \rangle \in f$ kelib chiqadi. f funksiya bo'lgani tufayli u holda (2) dan $y = z$ tenglik kelib chiqadi. Shuning uchun (1) ni $f^{-1} \circ f = \{ \langle y, y \rangle \mid x \text{ mavjudki } (\langle x, y \rangle \in f) \}$ ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerdan $f: A \rightarrow B$, A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi sur'yektiv akslantirish bo'lganidan $\langle x, y \rangle \in f \Rightarrow y \in rangf = B$ ekanligini hosil qilamiz. Unda $f^{-1} \circ f = \{ \langle y, y \rangle \mid y \in B \} = id_B$, bundan tashqari agar $f: A$ to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'lsa, u holda $f^{-1}: B$ to'plamni A to'plamga aks ettiruvchi biyektiv akslantirish bo'lishini isbotladik. $f: A$ to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi sur'yektiv akslantirish bo'lganidan u holda $f^{-1} \circ f = id_B$ bo'ladi. $f^{-1}: B$ to'plamni A to'plamga aks ettiruvchi sur'yektiv akslantirish bo'lganidan u holda $(f^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = id_A$ ya'ni $ff^{-1} = id_A$.

d) Agar f va g -in'yektiv akslantirishlar bo'lsa, u holda $f \cdot g$ ham shuningdek in'yektiv akslantirish bo'ladi va $(fg)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Haqiqatdan ham $\langle x, y \rangle \in (fg)^{-1}$ va $\langle x, z \rangle \in (fg)^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in fg$ va $\langle z, x \rangle \in fg$

$\Rightarrow z_1$ mavjudki ($\langle y, z_1 \rangle \in f$ va $\langle z_1, x \rangle \in g$) hamda z_2 mavjudki ($\langle z, z_2 \rangle \in f$ va $\langle z_2, x \rangle \in g$) $\Rightarrow z_1, z_2$ lar mavjudki ($(\langle y, z_1 \rangle \in f, \langle z, z_2 \rangle \in f)$ va $(\langle z_1, x \rangle \in g, \langle z_2, x \rangle \in g)$) $\Rightarrow z_1, z_2$ lar mavjudki ($(\langle z_1, y \rangle \in f^{-1}, \langle z_2, z \rangle \in f^{-1})$ va $(\langle x, z_1 \rangle \in g^{-1}, \langle x, z_2 \rangle \in g^{-1})$) $\Rightarrow z_1 = z_2$ chunki g^{-1} funksiya $\Rightarrow \langle z_1, y \rangle \in f^{-1}, \langle z_1, z \rangle \in f^{-1} \Rightarrow y = z$ chunki f^{-1} funksiya ya'ni $(fg)^{-1}$ funksiya. Demak agar f va g -in'yektiv akslantirishlar bo'lsa, u holda fg kompozitsiya ham shuningdek in'yektiv akslantirish bo'lishi isbotlandi.

Endi $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ tenglikni isbotlaylik. $\langle x, y \rangle \in (fg)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in fg \Leftrightarrow z$ mavjudki ($\langle y, z \rangle \in f$ va $\langle z, x \rangle \in g$) $\Leftrightarrow z$ mavjudki ($\langle x, z \rangle \in g^{-1}$ va $\langle z, y \rangle \in f^{-1}$) $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in g^{-1}f^{-1}$ ya'ni $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Agar f - akslantirish va $\langle a, b \rangle \in f$ bo'lsa, u holda b ni a elementdagi f ning qiymati deb ataladi va $f(a)$ yoki fa orqali belgilanadi.

Agar f - akslantirish va $A \subseteq \text{dom} f$ bo'lsa, u holda $\{f(a) | a \in A\}$ to'plamni f akslantirishdagi A to'plam obrazi (aksi) deb ataladi va $f[A]$ orqali belgilanadi.

$f \cap (A \times \text{rang} f)$ akslantirish esa f ning A to'plamdagi cheklanishi deb ataladi va $f \upharpoonright A$ orqali belgilanadi.

Tushunarliki bunda n - o'rinli amal $(n+1)$ - o'rinli munosabat bo'ladi, 0 - o'rinli amal $f: A^0 \rightarrow A$ yoki $f: \{\emptyset\} \rightarrow A$ esa birorta $a \in A$ element uchun $\{\langle \emptyset, a \rangle\}$ dir. Ko'pincha A to'plamdagi $\{\langle \emptyset, a \rangle\}$ 0 - o'rinli amal A dagi konstanta deb ataymiz va a element bilan aynan bir narsa deb qaraymiz. Agar f - A da n - o'rinli amal bo'lsa, u holda $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \in f$ shartni shunday yozamiz: $f(a_1, \dots, a_n) = b$. $n=0$ uchun bu $f(0) = b$ bo'ladi ya'ni $f = b$ biz qabul qilgan c konstantani uning qiymati bilan aynan bir narsa deb qarashga mos keladi.

f - A da n - o'rinli amal va $B \subseteq A$ bo'lsin.

Agar $a_1, \dots, a_n \in B$ ekanligidan $f(a_1, \dots, a_n) \in B$ bo'lishi kelib chiqsa, u holda B to'plamni f amalga nisbatan yopiq deyiladi.

Agar $\cup$ - ixtiyoriy ikki o'rinli munosabat bo'lsa, u holda $a) \text{dom} \cup^{-1} = \text{rang} \cup$, $b) \text{rang} \cup^{-1} = \text{dom} \cup$, $(\cup^{-1})^{-1} = \cup$.

Haqiqatan ham $x \in \text{dom} \cup^{-1} \Leftrightarrow y$ mavjudki ($\langle x, y \rangle \in \cup^{-1}$) $\Leftrightarrow y$ mavjudki ($\langle y, x \rangle \in \cup$) $\Leftrightarrow x \in \text{rang} \cup$ ya'ni $\text{dom} \cup^{-1} = \text{rang} \cup$. $y \in \text{rang} \cup^{-1} \Leftrightarrow x$ mavjudki ($\langle x, y \rangle \in \cup^{-1}$) $\Leftrightarrow x$ mavjudki ($\langle y, x \rangle \in \cup^{-1}$) $\Leftrightarrow y \in \text{dom} \cup$ ya'ni $\text{rang} \cup^{-1} = \text{dom} \cup$. $\langle x, y \rangle \in (\cup^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \cup^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \cup$ ya'ni $(\cup^{-1})^{-1} = \cup$.

Mashqlar

1. $\cup$ - A to'plamda tranzitiv ikki o'rilni munosabat, ixtiyoriy a uchun $\langle a, a \rangle \notin \cup$ va ixtiyoriy $a \in A$ uchun shunday $b \in A$ mavjudki, bunda $\langle a, b \rangle \in \cup$ bo'lsin. A cheksiz to'plam bo'lishini ko'rsating.

Isbot: Ixtiyoriy $a \in A$ uchun shunday $b \in A$ mavjudki, $\langle a, b \rangle \in \cup$, bu yerda $b \neq a$. $b \in A$ uchun shunday $c \in A$ mavjudki $\langle b, c \rangle \in \cup$ bo'lib, bu yerda $c \neq a$ bo'ladi, chunki agar $c = a$ bo'lsa, u holda $\langle b, a \rangle \in \cup$ va $\langle a, b \rangle \in \cup$ va $\cup$ - A to'plamda tranzitiv ikki o'rilni munosabat bo'lganidan, u holda $\langle a, a \rangle \in \cup$ bo'ladi bu esa ixtiyoriy $a \in A$ uchun $\langle a, a \rangle \notin \cup$ shartga ziddir. Shunga o'xshash mulohazalar keyingi elementlar oldingi elementlardan farqli ekanligini ko'rsatadi. Bu esa A to'plamning cheksiz to'plam ekanligini anglatadi.

2. Agar $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ va $(gf) = id_B$ bo'lsa, u holda f biyektiv bo'ladi va $g = f^{-1}$.

Isbot: Shartga ko'ra $dom f = A$ $rang f \subseteq B$, $dom g = B$, $rang g = A$ $y \in B \Rightarrow y \in dom g \Rightarrow x$ mavjudki $\langle y, x \rangle \in g \Rightarrow x \in rang g \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in dom f \Rightarrow z$ mavjudki $\langle x, z \rangle \in f \Rightarrow \langle y, z \rangle \in gf \Rightarrow \langle y, z \rangle \in id_B \Rightarrow y = z \Rightarrow \langle x, y \rangle \in f \Rightarrow y \in rang f$ ya'ni $B \subseteq rang f$. Ikkita $rang f \subseteq B$ va $B \subseteq rang f$ qism bo'lishlardan $rang f = B$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $f : A \rightarrow B$ ya'ni f akslantirish A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi sur'yektiv akslantirish (yoki A to'plamni B to'plam ustiga aks ettiruvchi akslantirish) bo'ladi. Unda biz bilamizki bunda $f^{-1}f = id_A$ shartga ko'ra $gf = id_B$ bu yerdan $gf = f^{-1}f$ tenglik kelib chiqadi. $gf = f^{-1}f \Rightarrow (gf)f^{-1} = (f^{-1}f)f^{-1} \Rightarrow g(ff^{-1}) = f^{-1}(ff^{-1}) \Rightarrow gid_B = f^{-1}id_B \Rightarrow g = f^{-1}$ chunki $\langle x, y \rangle \in g \Rightarrow \langle x, y \rangle \in g$ va $\langle y, y \rangle \in id_B \Rightarrow \langle x, y \rangle \in gid_B$ ya'ni $g \subseteq g \cdot id_B$ $\langle x, y \rangle \in g \cdot id_B \Rightarrow z$ mavjudki $(\langle x, z \rangle \in g \text{ va } \langle z, y \rangle \in id_B) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in g$ ya'ni $g \cdot id_B \subseteq g$ ikkita $g \subseteq g \cdot id_B$ va $g \cdot id_B \subseteq g$ qism bo'lishidan $g \cdot id_B = g$ tenglikka ega bo'lamiz. Bundan tashqari g funksiya bo'lgani uchun f^{-1} ham funksiya bo'ladi. Shunday qilib f bir vaqtda A to'plamni B to'plamga aks ettiruvchi in'yektiv va sur'yektiv akslantirish bo'ladi ya'ni f -biyektiv va $g = f^{-1}$.

Funksiya(akslantirish) tushunchasi

X va Y - qandaydir to'plamlar bo'lsin.

Agar birorta f qonunga muvofiq har qaysi $x \in X$ elementga $y \in Y$ element mos kelsa X to'plamda aniqlangan qiymatlari Y to'plamda bo'lgan funksiya mavjud deb aytiladi.

Funksiya tushunchasining keltirilgan bayoni ishning mohiyatini aks ettirishda juda

ham faol namoyon bo'ladi. Biroq zamonaviy qonunchilar nuqtainazaridan uni ta'rif deb atash mumkin emas chunki funksiya tushunchasiga ekvivalent bo'lgan moslik tushunchasidan foydalanildi. Shuning uchun funksiya(akslantirish) a) ta'rifini zamonaviy qonunchilar nuqtai nazaridan ta'rif deb atash mumkin [4].

Xulosa

Funksiya (akslantirish) ta'rifining an'anaviy ta'rifidan hozirgi zamon ta'rifiga o'tishdan iborat bo'lib, bu ta'rif matematik mantiq kitoblarida keltirilgan .Shu bilan birga akslantirishlar kompozitsiyasi binar munosabat nuqtai nazarida yana akslantirish bo'lishi in'yektiv akslantirishlar kompozitsiyasi yana in'yektiv akslantirish bo'lishi, syur'yektiv akslantirish kompozitsiyasi yana syur'yektiv akslantirish bo'lishi, biyektiv akslantirish kompozitsiyasi biyektiv bo'lishi ko'rsatilgan. Bundan tartiblangan juftlik va tartiblangan n -liklar yordamida to'plamlar dekart ko'paytmasi kiritilgan.

Adabiyotlar

- [1] Ершов Ю.Л., Полютин Е.А. Математическая логика.,Москва "Наука" 2010.
- [2] В.А. Зорич Математический анализ.,Часть I ,МЦНМО Москва 2012.
- [3] Л.Я Куликов "Алгебра и теория чисел" Москва. "Книга по Требованию", 2013. – 560 с. ISBN 978-5-458-27102-8
- [4] В. А. Зорич "Математический анализ" часть I, Москва, Издательство МЦНМО 2019.